J. 1641

284 213 E.N.S.E.T. (G) 82

DURÉE : 4 heures

E est l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, des fonctions d'une variable réelle, à valeurs réelles, définies et continues sur l'intervalle fermé $[-1, +1]$, E′ désigne le sous-espace vectoriel de E constitué par les fonctions deux fois continûment dérivables sur $[-1, +1]$ (les dérivées au point $x = -1$ étant les dérivées à droite en ce point, les dérivées au point $x = +1$ étant les dérivées à gauche en ce point). E″ désigne le sous espace de E′ constitué des fonctions f de E′ vérifiant $f(1) = f'(1) = 0$.

PRÉLIMINAIRE

Soit u une fonction une fois continûment dérivable sur $[-1, +1]$ et à valeurs dans $[-1, +1]$. Soit $f \in E$.

a. Montrer que les deux intégrales :

$$U(x) = \int_{-1}^{u(x)} f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad V(x) = \int_{u(x)}^{1} f(t)\,dt$$

définissent deux fonctions notées U et V sur $[-1, +1]$.

b. Montrer que U et V sont continûment dérivables sur $[-1, +1]$ et déterminer leurs dérivées en utilisant f, u, u'.

c. U et V sont elles deux fois dérivables?

PREMIÈRE PARTIE

On définit sur le carré $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$, l'application K, à valeurs dans $\mathbb{R}$, par :

$$K(x, y) = (x + y) - |x + y|$$

On désigne par A l'application qui, à toute fonction $f \in E$, fait correspondre la fonction $F = A(f)$ définie par :

$$\forall x \in [-1, +1] \quad F(x) = \int_{-1}^{+1} K(x, y) f(y)\,dy$$

1° Montrer que A est un endomorphisme de E.

2° Montrer que $\forall f \in E$, $F \in E''$ et que

$$F''(x) = -2f(-x) \quad \forall x \in [-1, +1]$$

3° En déduire que l'image A (E) de l'endomorphisme A vérifie A (E) = E″ et que A est injectif.

4° Déterminer les images par A des fonctions suivantes définies sur $[-1, +1]$ par :

$$f_1(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f_2(x) = e^{\alpha x}$$
$$f_3(x) = \cos \alpha x$$
$$f_4(x) = \sin \alpha x$$

Tournez la page S. V. P.

DEUXIÈME PARTIE

On veut montrer que A admet des vecteurs propres dans E et mettre en évidence quelques propriétés de ceux-ci et des valeurs propres associées.

1° Montrer que 0 n'est pas valeur propre de A.

2° Montrer que si $\varphi \in E$ est un vecteur propre de l'endomorphisme A, φ vérifie nécessairement les conditions suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} a.\ \varphi \in E'' ; \\ b.\ \exists\, \mu \in \mathbb{R}^* \quad \text{tel que} \quad \forall x \in [-1, +1] \qquad \varphi''(x) + \mu\, \varphi(-x) = 0. \end{cases}$$

Réciproquement, une fontion φ non égale à l'élément nul de E, O_E et vérifiant les conditions (1) est-elle un vecteur propre de A? S'il en est ainsi, préciser la valeur propre associée.

→ Pour la suite de cette deuxième partie, on considère l'équation :

$$(2)\qquad g''(x) + \mu\, g(-x) = 0 \qquad \forall x \in [-1, +1]$$

où μ est donné dans $\mathbb{R}^*$, g, fonction inconnue étant un élément de E'.

3° *a.* Montrer que toute fonction h de E se décompose de manière unique selon la formule : $h = h_1 + h_2$ h_1 (resp h_2) étant une fonction paire (respectivement impaire) appartenant à E. Que peut-on dire de h_1 et de h_2 si $h \in E'$.

b. Soit $h \in E'$, précisez la décomposition précédente pour la fonction h''.

4° Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation (2) dans le cas $\mu > 0$; en posant $\mu = \omega^2$ (avec $\omega > 0$), on montrera que ces solutions peuvent s'écrire :

$$g(x) = \alpha \cos \omega x + \beta\, (e^{\omega x} - e^{-\omega x})$$

(α et β étant des constantes réelles arbitraires).

Résoudre également l'équation (2) dans le cas

$$\mu < 0 \qquad (\text{on posera} \quad \mu = -\Omega^2 \quad \text{avec} \quad \Omega > 0).$$

5° Montrer que le système des conditions (1) a des solutions $\varphi \neq O_E$ si et seulement si μ vérifie l'une ou l'autre des conditions (3) ou (4) suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} \mu > 0 \qquad \mu = \omega^2, \omega > 0 \\ (e^{2\omega} - 1) \sin \omega + (e^{2\omega} + 1) \cos \omega = 0. \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \mu < 0 \qquad \mu = -\Omega^2, \Omega > 0 \\ (e^{2\Omega} - 1) \sin \Omega - (e^{2\Omega} + 1) \cos \Omega = 0. \end{cases}$$

6° *a.* Tracer le graphe de la fonction $y \longmapsto \dfrac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$

b. Montrer que les équations (3) admettent une infinité de solutions notées ω_n vérifiant

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n < \ldots$$

avec :

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi < \omega_n < n\,\pi, \forall\, n \text{ entier} > 0$$

c. Montrer de même que les équations (4) admettent une infinité de solutions notées Ω_n vérifiant

$$0 < \Omega_1 < \Omega_2 < \ldots < \Omega_n < \ldots$$

Tournez la page S. V. P.

$$(n-1)\,\pi < \Omega_n < \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi. \qquad \forall\, n \text{ entier} > 0.$$

7° En supposant ω solution de (3) [respectivement Ω solution de (4)] donner l'expression des solutions correspondantes du système (1).

8° On pose :

$$\forall x \in [-1, +1].$$

$$u_n(x) = (e^{\omega_n} - e^{-\omega_n}) \cos \omega_n x - \cos \omega_n (e^{\omega_n x} - e^{-\omega_n x})$$

$$v_n(x) = (e^{\Omega_n x} + e^{-\Omega_n x}) \sin \Omega_n - (e^{\Omega n} + e^{-\Omega_n}) \sin \Omega_n x$$

Montrer que u_n et v_n sont solutions de (1) [respectivement dans le cas $\mu = \omega_n^2$ et $\mu = -\Omega_n^2$].

9° *a.* Déduire de ce qui précède que A admet une infinité de valeurs propres que l'on peut ranger en une suite (λ_n) de signes alternés telle que la suite $(|\lambda_n|)$ soit décroissante.

b. Quels sont les sous-espaces propres associés et leur dimension?

c. Que peut-on dire de la série $\Sigma|\lambda_n|$?

10° Soient n et m des entiers naturels quelconques $\geqslant 1$.

Montrer les relations :

$$(\omega_n^2 + \Omega_m^2) \int_{-1}^{+1} u_n(x)\, v_m(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} \left[v_m''(-x)\, u_n(x) - u_n''(x)\, v_m(-x) \right] dx$$

En déduire que

$$\int_{-1}^{+1} u_n(x)\, v_m(x)\, dx = 0$$

Montrer également que si n et m sont des entiers distincts, supérieurs à 1 on a

$$\int_{-1}^{+1} u_n(x)\, u_m(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} v_n(x)\, v_m(x)\, dx = 0$$

11° Calculer les intégrales

$$\int_{-1}^{+1} [u_n(x)]^2\, dx \qquad \text{et} \qquad \int_{-1}^{+1} [v_n(x)]^2\, dx$$

[on pourra utiliser les décompositions de u_n et de v_n en leurs parties paires et impaires (voir Deuxième partie 3°)].

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail